线性代数　中国科学技术大学 2023 春
行列式

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定理

1. 交换 A 某两行得 B, 则 $\det(B) = -\det(A)$.
2. 将 A 的某一行乘 λ 得 B, 则 $\det(B) = \lambda\det(A)$.
3. 若 A 的某一行是两个向量之和, 则 $\det(A)$ 可拆成两个行列式之和.
4. 若 A 的某两行成比例, 则 $\det(A) = 0$.
5. 将 A 的某一行 λ 倍加到另一行得 B, 则 $\det(B) = \det(A)$.

将 det 可以看成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的函数. 则:

1. 反对称性: $\det(\cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j \cdots) = -\det(\cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i \cdots)$;
2. 多重线性:
   $\det(\cdots, \lambda\alpha_i + \mu\beta_i, \cdots) = \lambda\det(\cdots, \alpha_i, \cdots) + \mu\det(\cdots, \beta_i, \cdots)$;
3. 规范性: $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n) = 1$.

行列式显示表示及三角分块矩阵行列式

定理 (行列式显示表示)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 则

$$\det(A)=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

性质

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix}$ 为分块矩阵, 其中 A_{ii} 均为方阵. 则

$$\det(A)=\prod_{i=1}^{k}\det(A_{ii}).$$

行列式基本性质

定理

$$\det(A) = \det(A^T).$$

定理 (列展开)

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 则对任意 $1 \le j \le n$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.}$$

定理

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

行列式（例）

例

设 $m > n, A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$. 则

$$\det(AB) = 0.$$

例

设 $A \in F^{n\times n}, B \in F^{n\times m}, C \in F^{m\times n}, D \in F^{m\times m}$. 若 A 可逆, 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D - CA^{-1}B).$$

矩阵可逆的判定条件

定义 (伴随矩阵)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 称矩阵

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^T_{n\times n}$$

为 A 的伴随矩阵.

定理

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 则

$$A^*A = AA^* = \det(A)I_n.$$

注：定理等价于 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \det(A)\delta_{ij}$ 以及 $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \det(A)\delta_{ij}$, 其中 δ_{ij} 为 Kronecker 记号, 满足 $(\delta_{ij})_{n\times n} = I_n$.

定理

设 A 为 n 阶方阵. 则以下几条等价

1. A 可逆 (*i.e.* 存在 X 使得 $AX = I = XA$.);
2. $\det(A) \neq 0$;
3. 存在 X 使得 $I = XA$;
4. 存在 X 使得 $AX = I$.

若以上几条成立, 则 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$.

例

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 665.$$

例

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}.$$

例

$$\begin{vmatrix} x & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i).$$

例

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

定理 (Cramer 法则)

若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 可逆. 则一般线性方程组

$$AX=b$$

有唯一解

$$(x_1,\cdots,x_n)=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right),$$

其中 $\Delta=\det(A)$, $\Delta_i=\det(\alpha_1\cdots,\alpha_{i-1},b,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n)$.

证明思路: $X=A^{-1}b=\frac{1}{\det(A)}A^*b$.

例

使用 Cramer 法则求解线性方程组:

$$\begin{cases} & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & =2 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & =3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & =4 \end{cases}$$

答: $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(7/3,4/3,1/3,-2/3)$.

- 初等行变换
  - 交换两行
  - 某行乘以一个非零常数
  - 某行乘以一个常数加到另一行上
- 初等列变换
  - 交换两列
  - 某列乘以一个非零常数
  - 某列乘以一个常数加到另一列上

初等变换(6 个) = 初等行变换(3 个) + 初等列变换(3 个)

问题: 对单位矩阵做初等变换, 我们会得到什么矩阵?

定义 (初等方阵)

1. 交换单位阵的第 i,j 行 (或 i,j 列) 得

$$S_{ij} := \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 && 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 && 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

2. 将单位阵第 i 行 (或 i 列) 乘以非零常数 λ 得

$$D_i(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

初等方阵

定义 (初等方阵)

3. 将单位阵的第 j 行的 λ 倍交到第 i 行 (或第 i 列的 λ 倍加到第 j 列) 得

$$T_{ij}(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

我们称上面定义的三类矩阵为初等矩阵.